

Prof. Breuer

# Technischer Bericht Nr. 51

Seismische Messung langsamer Schwingungen durch  
sehr tief abgestimmte mechanische Systeme

cand. ing. W. MINDT

H51

1 9 6 1

Seismische Messung langsamer Schwingungen durch sehr tief  
abgestimmte mechanische Systeme

Zusammenfassung

Ueber die Möglichkeiten zur Konstruktion sehr tief abgestimmter Pendel (Eigenfrequenz ca. 0,2 Hz) werden grundlegende Untersuchungen angestellt und zwei Prinzipien angegeben, nach denen solche Pendel gebaut werden. Ferner wird der Einfluß einer der horizontalen Schwingung überlagerten Drehschwingung berechnet und für Turmschwingungen ein Weg zur rechnerischen Elimination des Fehlers gezeigt.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. W. MINDT

(cand.ing.W.Mindt)

Der Abteilungsleiter

gez. P. MATTHIEU

(Prof.Dr.phil. P.Matthieu)

Der Institutsdirektor

gez. L. CREMER

(Prof.Dr.-Ing. L. Cremer)

Berlin-Charlottenburg, den 27. April 1961



Seismische Messungen langsamer Schwingungen durch sehr  
tief abgestimmte mechanische Systeme

1. Einleitung
2. Grundsätzliches über die Konstruktion tief abgestimmter Pendel
3. Einfluß einer der horizontalen Schwingung überlagerten Drehschwingung
4. Abschätzung und Elimination des durch die Drehschwingung verursachten Fehlers für den Fall von Turmschwingungen
  - a) Bestimmung des Faktors  $(\mp \frac{\theta}{m s} - \frac{g}{\omega^2})$
  - b) Abschätzung des Winkels  $\alpha_0$  für Turmschwingungen
  - c) Abschätzung des Fehlers
  - d) Elimination des Fehlers
5. Beschreibung der beiden gebauten Meßgeräte
  - a) Stehendes Pendel
  - b) Hängendes Pendel

## 1. Einleitung

Bei der Messung langsamer Schwingungen - darunter verstehen wir Schwingungen von 1 Hz und tiefer - , wie sie z.B. bei Türmen, Schornsteinen oder sonstigen Bauwerken auftreten können, bereiten Absolut-Messungen nach dem seismischen Prinzip erhebliche Schwierigkeiten. Es lassen sich hier die üblichen Schwingungsgeber nicht mehr verwenden. Deshalb wurde es notwendig, besondere seismische Geräte zu entwickeln. Es bieten sich 2 Möglichkeiten an:

- a) Sehr tief abgestimmte seismische Systeme: Hier führt die Masse unter dem Einfluß einer erregenden periodischen Bewegung Schwingungen aus, deren Amplituden durch die Eigenfrequenz und die Dämpfung des Systems, sowie durch die Erregungsfrequenz bestimmt wird. Es wird unmittelbar der Weg gemessen.
- b) Hoch abgestimmte seismische Systeme: Hierbei wird die Beschleunigung gemessen, die die Masse erfährt. Zur Erhaltung der Wegkurve muß zweimal integriert werden.

In diesem Bericht soll die Entwicklung tief abgestimmter seismischer Systeme (Pendel) behandelt werden.

Zur Herstellung eines solchen Systems bieten sich mehrere Konstruktionsmöglichkeiten mechanischer, sowie auch hydraulischer Art an. Von uns wurde das Prinzip des Schwerependels gewählt und einer genaueren Untersuchung unterzogen.

Tritt neben der horizontalen Schwingungskomponente noch eine periodische Schrägstellung der bewegten Unterlage auf - wie etwa bei Turmschwingungen - so wird das Meßergebnis dadurch unter gewissen Bedingungen wesentlich verfälscht. Der Einfluß der Schrägstellung wird deshalb genau untersucht und eine Möglichkeit zur Fehlerkorrektur angegeben. Schließlich werden 2 nach dem Prinzip des Schwerependels in der Abteilung Mechanik gebaute Schwingungsmeßgeräte beschrieben.

## 2. Grundsätzliches über die Konstruktion tief abgestimmter Pendel

Um den Anwendungsbereich des Schwingungsmeßgerätes nach den unteren Frequenzen hin auszudehnen, muß die Eigenfrequenz der seismisch aufgehängten Masse möglichst tief gewählt werden. Eine tiefe Eigenfrequenz des Pendels kann grundsätzlich auf zwei verschiedene Arten erreicht werden:

- a) Man legt den Schwerpunkt nur wenig unterhalb des Drehpunktes. Diese Anordnung wird im folgenden als "Hängendes Pendel" bezeichnet.
- b) Der Schwerpunkt des Pendels liegt oberhalb des Drehpunktes, und mit Hilfe von Rückstellfedern wird eine gerade noch stabile Lage erzeugt ("Stehendes Pendel"). Das aus Schwerkraft und Federkraft resultierende Richtmoment bleibt hierbei innerhalb kleiner Winkel den Pendelausschlägen proportional. Durch diese Methode, die bereits 1904 von WIECHERT bei der Konstruktion seines "astatischen Horizontalseismometers" angewandt wurde, lassen sich auf einfache Weise sehr niedrige Eigenfrequenzen erzielen.

Da zwischen dem Hängenden und dem Stehenden Pendel prinzipielle Unterschiede bestehen, soll im folgenden auf die Berechnungsgrundlagen eingegangen werden. In beiden Fällen handelt es sich um einfache Schwinger mit einem Freiheitsgrad. Ihre Bewegungsgleichungen lauten gemäß NEWTON

$$m\ddot{x} = \sum_i \kappa_i$$

wobei die rechte Seite die Summe aller auf den Körper einwirkenden Kräfte angibt. Diese Kräfte sind die äußere anregende Kraft, die Dämpfungskraft und die Rückstellkraft. Die Rückstellkraft besteht aus zwei Anteilen: Einer elastischen Federkraft und der Schwerkraft. Abb. 1 zeigt in schematischer Darstellung die Wirkungsweise dieser Kräfte beim Stehenden Pendel (a) und beim Hängenden Pendel (b):

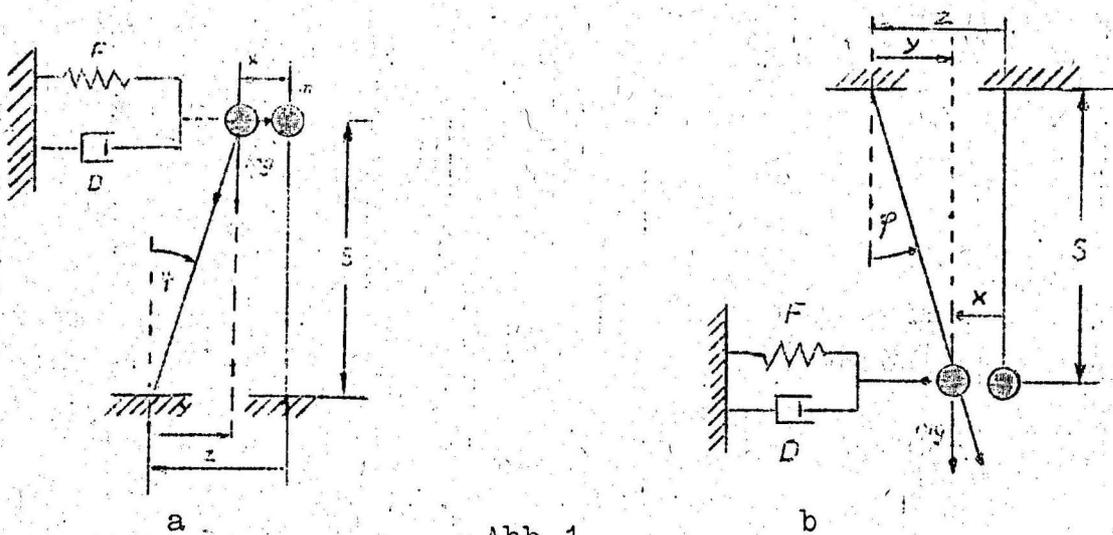


Abb. 1

Hierbei ist  $z = z_0 \cdot \cos \omega t$  die erregende Schwingung,  $y$  der Pendelausschlag und damit  $z - y = x$  die resultierende Bewegung der Pendelmasse  $m$ .  $s$  gibt die Entfernung Drehpunkt-Schwerpunkt an,  $g$  ist die Erdbeschleunigung. Bei beiden Pendeln wirkt die Dämpfungskraft ( $D$ ) und die Federkraft ( $F$ ) der Richtung des Pendelausschlags entgegen. Die Dämpfungskraft sei als genau geschwindigkeitsproportional angenommen, was bei den hier auftretenden geringen Geschwindigkeiten leicht realisiert werden kann. Die Federkraft ist bei dem Stehenden Pendel durch das Moment der Rückstellfedern gegeben, dagegen bei dem Hängenden Pendel durch die Rückstellkraft eines zusätzlich angebrachten relativen Schwingungsaufnehmers, wie später ausführlicher beschrieben wird. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Pendeln besteht darin, daß die Schwerkraft einmal in Richtung von  $y$  (Fall a) und einmal in entgegengesetzter Richtung von  $y$  (Fall b) wirkt.

Für die folgenden Rechnungen ist es zweckmäßiger, statt des Pendelausschlages  $y$  den Drehwinkel  $\varphi = \frac{y}{s}$  (gültig nur für kleine Werte von  $y$ ) einzuführen, und nicht mit Kräften, sondern mit Drehmomenten zu rechnen: Die Bewegungsgleichungen für beide Fälle lassen sich in einer Differentialgleichung mit Stör- und Dämpfungsglied zusammenfassen:

$$\Theta \ddot{\varphi} + r \dot{\varphi} + \bar{c} \varphi = + ms \ddot{z} \quad (1)$$

Darin bedeuten:

- $\Theta = \Theta_0 + ms^2$  das Massenträgheitsmoment bezüglich des Drehpunktes ( $\text{kg cm sec}^2$ )
- $r$  die absolute Dämpfung ( $\text{kg cm sec}$ )

$\bar{c} \cdot \varphi = (c \pm mgs) \cdot \varphi$  das Rückstellmoment (kg cm) mit  
 $c$  Federanteil  
 $\pm mgs$  Schwereanteil (oberes Zeichen für Hängendes, unteres Zeichen für Stehendes Pendel)  
 $m$  die Masse des Pendels ( $\text{kg cm}^{-1} \text{ sec}^2$ )

Zur Auffindung der Lösung der Differentialgleichung ist es zweckmäßig, in die komplexe Schreibweise überzugehen (siehe KLOTTER: Techn. Schwingungslehre Bd. I). Man erhält dann als Störlösung des periodischen Falles

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \gamma) \quad (2)$$

und für die wahre Eigenfrequenz  $\bar{\omega}_0$  die Beziehung

$$\bar{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{r}{2\theta}\right)^2$$

wobei  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{\theta}}$  die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ist. Die Dämpfung des aperiodischen Grenzfalls ergibt sich aus den Bedingungen  $\bar{\omega}_0 = 0$  zu  $r_a = 2\sqrt{\theta \cdot c}$

Führt man die Verstimmung  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$  und das Dämpfungsmaß  $D = \frac{r}{r_a}$  ein, so berechnet sich die Winkelamplitude der erzwungenen Schwingung zu

$$\varphi_0 = z_0 \cdot \frac{ms}{\theta} \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2a)$$

und ihre Phasenverschiebung gegenüber der erregenden Schwingung zu

$$\gamma = \arctg \frac{2D\eta}{\eta^2 - 1} \quad (2b)$$

Für die Messung der Schwingung ist nun weniger der Drehwinkel  $\varphi(t)$  interessant, als vielmehr der Weg (Bogen)  $u(t)$ , den die Anzeigevorrichtung registriert. Ist  $a$  der Abstand zwischen Drehpunkt und dem Anzeigegerät, so wird der gemessene Weg  $u(t) = a \cdot \varphi(t)$ , und seine Amplitude, d.h. der Gesamtausschlag des Pendels  $u_0 = a \cdot \varphi_0$ .

Zwischen  $u_0$  und der Amplitude der erregenden Schwingung  $z_0$  herrscht demnach die Beziehung

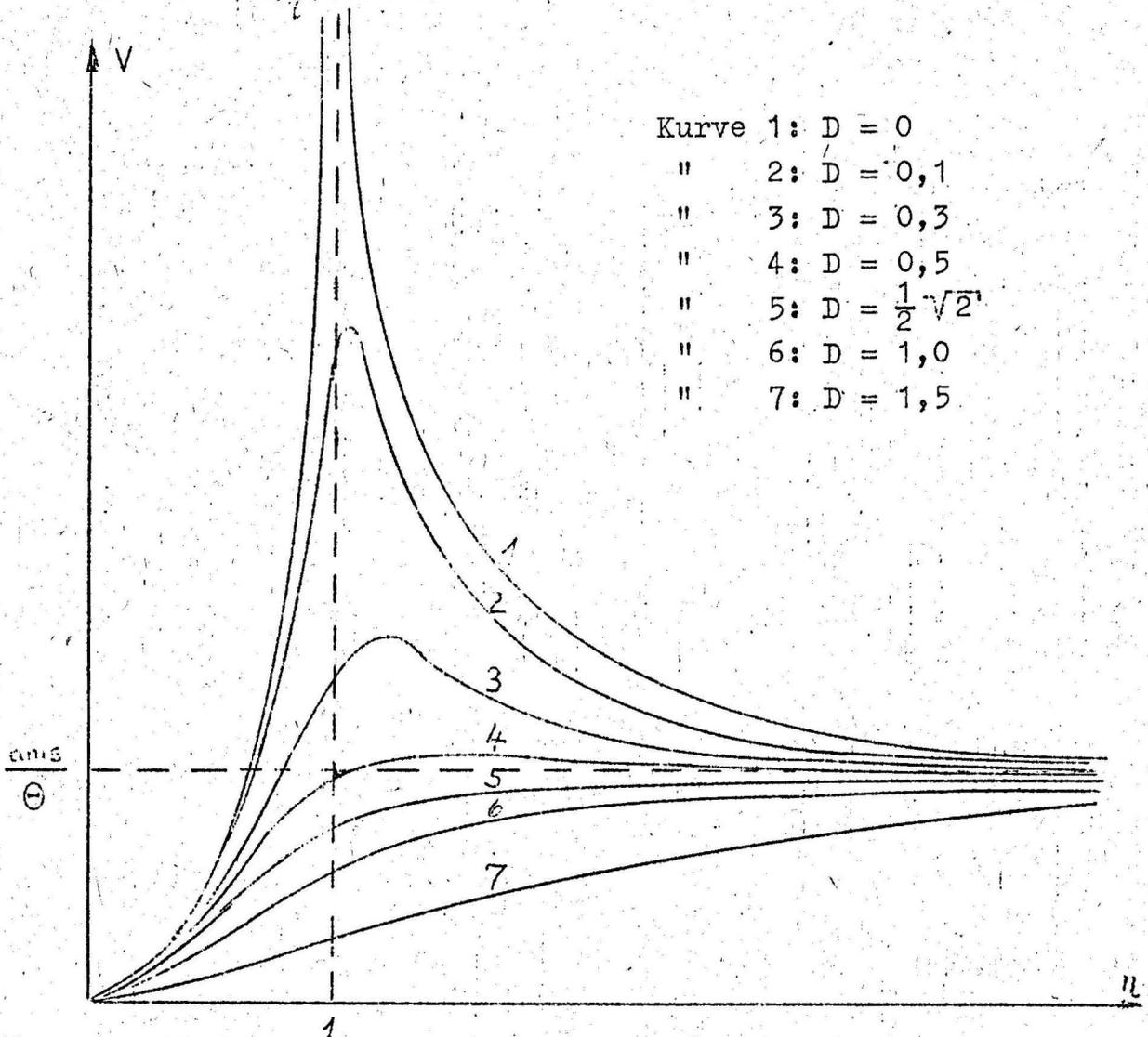
$$u_0 = V \cdot z_0 \quad (3)$$

wobei

$$V = \frac{ams}{\theta} \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (3a)$$

als Vergrößerungsmaßstab bezeichnet wird.

Für eine genaue Messung ist es erforderlich, daß der Vergrößerungsmaßstab  $V$  innerhalb eines möglichst weit an niedrige Frequenzen heranreichenden Bereichs konstant bleibt, was durch geeignete Wahl des Dämpfungsmaßes  $D$  erreicht werden kann. Das folgende Diagramm (Abb.2) gibt verschiedene Darstellungen der Funktion  $V = f(\eta)$  mit  $D$  als Parameter an:



Wie man sieht, kommt für unsere Zwecke ein Dämpfungsmaß in Frage, das in der Größenordnung von 0,5 liegt. Dann ist  $V$  etwa oberhalb der doppelten Eigenfrequenz des ungedämpften Systems als nahezu konstant anzusehen; unterhalb dieser Grenze ist eine Messung genau sinusförmiger Schwingungen durch Korrektur der erhaltenen Ergebnisse anhand der Charakteristik  $V = f(\eta)$  möglich. Die Messung von nicht sinusförmigen Schwingungen ist dann jedoch von mehr oder weniger großen Fehlern behaftet.

Für die Konstruktion des Pendels ist der Faktor  $\frac{ams}{\Theta}$  von besonderer Bedeutung. Er bestimmt den Betrag des am Ort des Anzeigergerätes gemessenen Ausschlag und ist also ein Maß für die Empfindlichkeit des Meßgerätes. Daß dieser Ausschlag proportional dem Abstand Drehpunkt-Anzeigergerät ( $a$ ) ist, ist selbstverständlich. Wir wollen deshalb nur den Einfluß des Faktors  $\frac{ms}{\Theta + ms^2}$ , der als  $V_0$  bezeichnet werde, untersuchen. Eine einfache Extremwertrechnung zeigt, daß bei gegebenen  $\Theta_0$  für  $V_0$  dann ein Maximum vorliegt, wenn  $ms^2 = \Theta_0$ . Dann ist  $V_0 = \frac{1}{2s}$ .

Zum Beispiel ist bei einem homogenen dünnen Stab der Länge 1 das Trägheitsmoment  $\Theta_0 = \frac{1}{12} ml^2$ . Um eine maximale Empfindlichkeit zu erzielen, muß die Drehachse so gelegt werden, daß  $s = \frac{1}{\sqrt{12}}$  beträgt.

Es sei nun danach gefragt, inwieweit sich diese Bedingung für eine maximale Empfindlichkeit bei den beiden Pendeln realisieren läßt. Dazu muß berücksichtigt werden, daß das Trägheitsmoment  $\Theta$  und die Eigenfrequenz  $\omega_0$  durch die Beziehung  $\omega_0 = \frac{c}{\Theta} = \frac{c+mgs}{\Theta + ms^2}$  zusammenhängen.

Bei beiden Pendeln soll eine Eigenfrequenz von  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0,25 \cdot s^{-1}$  gefordert sein.

Setzt man für das Hängende Pendel  $c = 0$  (d.h.: Federkraft des Schwingungsaufnehmers vernachlässigt) und  $\Theta_0 = ms^2$ , so ergibt sich:  $\omega_0^2 = \frac{g}{2s}$  bzw.  $s = \frac{g}{2\omega_0^2}$ . Daraus folgt, daß  $s$  200 cm betragen muß, um die gewünschte Eigenfrequenz zu erhalten. Bei  $c = 0$  müsste  $s$  noch größer sein. Auf das Beispiel des homogenen Stabes angewendet, heißt das, daß die Länge des Stabes mindestens 7 m betragen muß. Diese Werte sind im Hinblick auf die Handhabung des Gerätes nicht zu verwirklichen. Bei kleineren Abmessungen des Hängenden Pendels muß eine geringere Empfindlichkeit in Kauf genommen werden.

Im Gegensatz dazu läßt sich beim Stehenden Pendel der Zähler  $c-mgs$  durch geeignete Wahl der Federkonstanten  $c$  so klein wählen, daß sich die geforderte Eigenfrequenz bei jedem beliebigen Wert des Nenners verwirklichen läßt. Man kann also die maximale Empfindlichkeit auch bei kleinen Werten von  $s$  erzielen.

Durch diese Gegebenheiten wird der wesentliche Unterschied in der Anwendung der beiden Meßgeräte bestimmt: Ein Stehendes Pendel ist wegen der großen erzielbaren Empfindlichkeit zur Messung sehr kleiner Schwingungsamplituden geeignet, während ein Hängendes Pendel zur Messung größerer Amplituden herangezogen werden kann.

### 3. Einfluß einer der horizontalen Schwingung überlagerten Drehschwingung

In der Praxis treten selten rein horizontale Schwingungen auf. Häufig liegt der Fall vor, daß neben der horizontalen Bewegung eine sich periodisch mit der Schwingung ändernde Schrägstellung der bewegten Unterlage auftritt. Die resultierende Bewegung der Pendelunterlage kann dann als Überlagerung einer Horizontalschwingung und einer Drehschwingung, deren Drehachse senkrecht zur Bewegungsrichtung durch den Pendelfußpunkt verläuft, aufgefaßt werden. Das Störglied der Differentialgleichung, die die Bewegung der Pendelmasse jetzt beschreibt, setzt sich aus den Anteilen der horizontalen Schwingung und der Drehschwingung additiv zusammen.

Als erstes sei für beide Pendel die Differentialgleichung der Einfachheit halber für den Fall aufgestellt, daß als erregende Schwingung allein die Drehschwingung vorliegt.

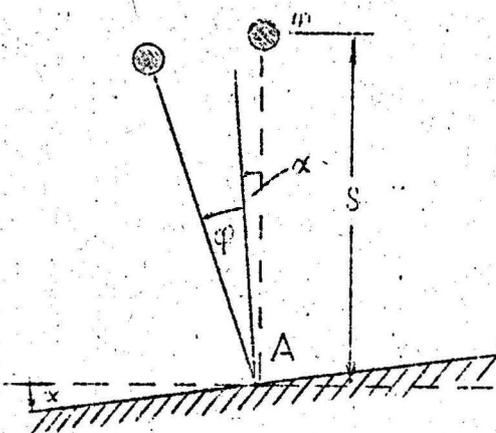


Abb. 3a

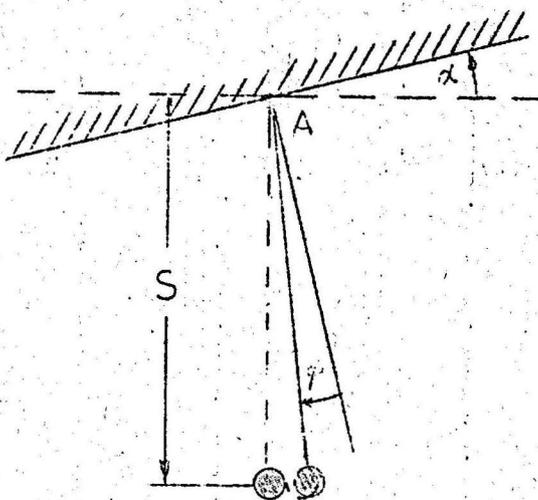


Abb. 3b

a) Stehendes Pendel: Die Unterlage des Pendels führe um die senkrecht zur Zeichenebene gelegene Achse (A) Drehbewegungen

um den Winkel  $\alpha = \alpha_0 \cdot \cos \omega t$  aus. Der hierdurch verursachte Pendelausschlag beträgt  $\varphi = \varphi(t)$  (s. Abb. 3a). Die Differentialgleichung für diesen Fall lautet:

$$\begin{aligned} \Theta(\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha}) &= -r\dot{\varphi} - c\varphi + mgs(\varphi + \alpha) \\ \text{bzw.} \quad \Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + \bar{c}\varphi &= -\Theta\ddot{\alpha} + mgs\alpha \end{aligned} \quad (4a)$$

b) Hängendes Pendel: Die Bezeichnungen der Winkel sind hier wie im Fall a) (s. Abb. 3b). Die Differentialgleichung ergibt sich analog zu

$$\begin{aligned} \Theta(\ddot{\alpha} - \ddot{\varphi}) &= r\dot{\varphi} + c\varphi - mgs(\alpha - \varphi) \\ \text{bzw.} \quad \Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + \bar{c}\varphi &= \Theta\ddot{\alpha} + mgs\alpha \end{aligned} \quad (4b)$$

Als nächstes sei der Fall betrachtet, daß gleichzeitig eine horizontale Bewegung der Unterlage  $z = z_0 \cos \omega t$  und eine periodische Änderung des Drehwinkels  $\alpha = \alpha_0 \cos \omega t$  auftreten. Mit der Voraussetzung, daß  $\alpha$  eine lineare Funktion von  $z$  ist,

$$\alpha = k \cdot z \quad (5)$$

wobei auf die Größe der Konstanten  $k$  später noch ausführlich eingegangen wird, ergibt sich die Bewegungsgleichung der Pendelmasse durch Addition der Störglieder der Gleichungen (1) und (4a) bzw. (4b). Dabei muß jedoch berücksichtigt werden, daß die Zählrichtung des Ausschlagwinkels  $\varphi$  in Abb. 1a und 3a bzw. in Abb. 1b und 3b entgegengesetzt festgelegt wurden. Richtet man sich nach der in Abb. 1a und 1b benutzten Zählrichtung, so erhalten die Störglieder in den Gleichungen (4a) und (4b) umgekehrte Vorzeichen, und die zusammenfassende Bewegungsgleichung erhält die Form:

$$\Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + \bar{c}\varphi = m\ddot{z} \mp \Theta\ddot{\alpha} - mgs\alpha \quad (6)$$

Hierbei gilt wieder das obere Vorzeichen für das Hängende, das untere für das Stehende Pendel. Nach der Beziehung

$$\alpha = k \cdot z = k \cdot z_0 \cdot \cos \omega t$$

läßt sich die Differentialgleichung in die Form bringen:

$$\Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + \bar{c}\varphi = (-ms\omega^2 \pm \Theta k\omega^2 - mgs k) \cdot z_0 \cdot \cos \omega t$$

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt in derselben Weise wie bei der Gleichung (1). Als Störlösung des periodischen Falles erhält man wieder

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \gamma)$$

wobei jetzt  $\varphi_0$  folgenden Ausdruck annimmt:

$$\varphi_0 = \left( \frac{ms}{\theta} \cdot \eta^2 + k \cdot \eta^2 - \frac{mgs \cdot k}{c} \right) \cdot z_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (7)$$

Die Phasenverschiebung beträgt wie in Gleichung (2b)

$$\gamma = \arctg \frac{2D}{\eta^2 - 1}$$

Aus der Gleichung (7) ist zu ersehen, daß sich der Betrag der Winkelamplitude der Pendelschwingung  $\varphi_0$  aus 3 Gliedern zusammensetzt: Der erste Summand gibt den Anteil an, der durch die horizontale Komponente der erregenden Schwingung zustande kommt, während der 2. und der 3. Summand den durch die Dreh-schwingung bedingten Anteil darstellen. Die letzten beiden Summanden geben also den Fehler an, um den das Meßergebnis verfälscht ist. Zur Verdeutlichung sei statt  $\varphi_0$  der gemessene Bogen des Pendelausschlages,  $u_0 = a \cdot \varphi_0$  eingeführt. Mit dem in Gleichung (3a) definierten Vergrößerungsmaßstab  $V$  läßt sich Gleichung (7) umformen in

$$u_0 = V \cdot z_0 + \left( \frac{\theta}{ms} - \frac{g\theta}{c\eta^2} \right) k \cdot V \cdot z_0$$

Mit  $\eta^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega^2 \cdot \theta}{c}$  und  $k \cdot z_0 = \alpha_0$  (s. Gleichung (5)) folgt:

$$\begin{aligned} u_0 &= V \cdot z_0 + \left( \frac{\theta}{ms} - \frac{g}{\omega^2} \right) V \cdot \alpha_0 \\ &= (u_0)_{\text{hor}} + (u_0)_{\text{dreh}} \end{aligned} \quad (8)$$

Der erste Summand  $(u_0)_{\text{hor}} = V \cdot z_0$  gibt den für die Messung allein interessierenden Anteil der horizontalen Schwingungskomponente an. Er ist identisch mit dem in Gleichung (3) gefundenen Wert.

Der zweite Summand  $(u_0)_{\text{dreh}}$  ist der durch die zusätzliche Dreh-schwingung verursachte Meßfehler. Er ist einmal der Amplitude

der Drehschwingung  $\alpha_0$  und dem Vergrößerungsmaßstab  $V$  proportional. Außerdem hängt  $(u_0)_{\text{dreh}}$  von dem Faktor  $(\frac{\Theta}{ms} - \frac{g}{\omega^2})$  ab. Wieweit dieser Faktor die Größe des Meßfehlers beeinflusst, soll im folgenden Abschnitt behandelt werden.

4. Abschätzung und Elimination des durch die Drehschwingung verursachten Fehlers für den Fall von Turmschwingungen

a) Bestimmung des Faktors  $(\frac{\Theta}{ms} - \frac{g}{\omega^2})$ : Während die Erdbeschleunigung  $g$  und die jeweilige Frequenz  $\omega$  bekannt sind, bereitet die Bestimmung des Bruchs  $\frac{\Theta}{ms}$  einige Schwierigkeiten: Das Trägheitsmoment  $\Theta$  läßt sich wegen der zumeist unhomogenen Pendelform nur abschätzen, und auch der Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkt  $S$  kann wegen des Einflusses des zur Dämpfung benutzten Oels auf die Lage des Schwerpunktes nicht genau ermittelt werden. Dennoch läßt sich der Bruch  $\frac{\Theta}{ms}$  über einen Umweg experimentell recht genau ermitteln:

Dazu sei der Fall der statischen Auslenkung des Pendels betrachtet: Das Pendel befinde sich anfangs in seiner Ruhelage, der Ausschlagswinkel  $\varphi_0$  sei gleich Null. Wird die Unterlage des Gerätes

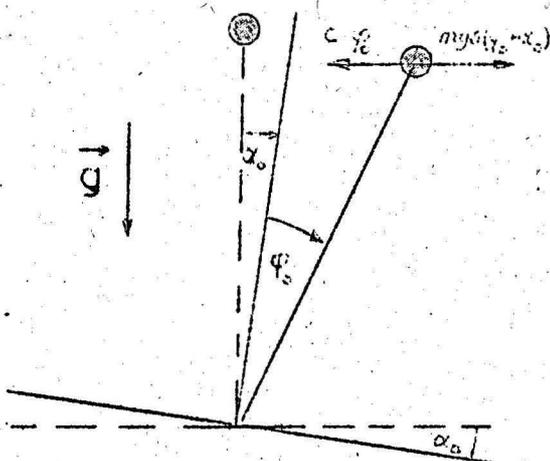


Abb. 4a

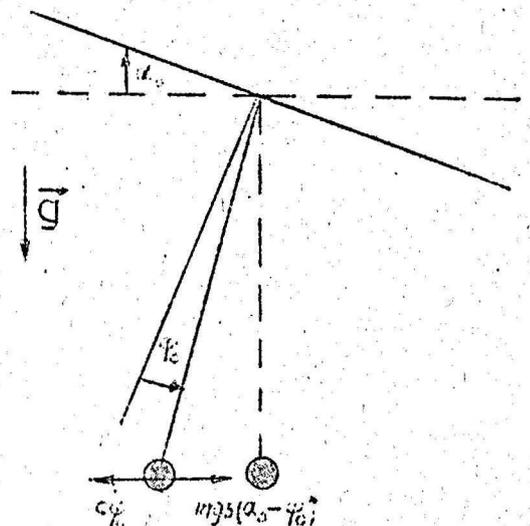


Abb. 4b

jetzt um den Winkel  $\alpha_0$  gegen die Horizontale schräggestellt, so stellt sich eine neue Ruhelage des Pendels ein, die gegen die alte um den Ausschlagswinkel  $\varphi_0$  verschoben ist. Beim Ste-

henden Pendel (Abb.4a) besteht in dieser Ruhelage ein Gleichgewicht zwischen dem durch die Schwerkraft verursachten Drehmoment  $mgs(\varphi_0 + \alpha_0)$  und dem Drehmoment der Federkraft  $c \cdot \varphi_0$ . Es gilt:

$$mgs(\varphi_0 + \alpha_0) = c \cdot \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \frac{mgs}{c - mgs} \cdot \alpha_0 = \frac{mgs}{c} \cdot \alpha_0$$

In analoger Weise herrscht beim Hängenden Pendel (Abb.4b) ein Gleichgewicht zwischen den Drehmomenten  $mgs(\alpha_0 - \varphi_0)$  und  $c \cdot \varphi_0$ :

$$\varphi_0 = \frac{mgs}{c + mgs} \cdot \alpha_0 = \frac{mgs}{c} \cdot \alpha_0$$

Für beide Pendel besteht also zwischen dem Schrägstellwinkel  $\alpha_0$  und dem sich daraus ergebenden Pendelausschlag  $\varphi_0$  die Beziehung

$$\varphi_0 = \frac{mgs}{c} \cdot \alpha_0 \quad (9)$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, daß  $\bar{c}$  beim Hängenden Pendel den Wert  $(c + mgs)$ , beim Stehenden Pendel  $(c - mgs)$  besitzt.

Die Winkel  $\varphi_0$  und  $\alpha_0$  lassen sich experimentell leicht bestimmen, und aus ihrem Verhältnis der Bruch  $\frac{mgs}{c}$  berechnen. Es sei hier schon vorausgegriffen, daß sich für die beiden von uns gebauten Pendel die Werte ergaben:

$$\left(\frac{mgs}{c}\right)_{\text{S.P.}} = 100 \quad \left(\frac{mgs}{c}\right)_{\text{H.P.}} = 0,6$$

Berücksichtigt man nun, daß  $\omega_0^2 = \frac{\bar{c}}{\theta}$ , so folgt:

$$\frac{\theta}{ms} = \frac{g}{\omega_0^2} \cdot \frac{\bar{c}}{mgs}$$

Mit  $g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$  und  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0,25 \text{ s}^{-1}$  ergeben sich für den gesuchten Bruch  $\left(\frac{\theta}{ms}\right)$  die Werte:

$$\left(\frac{\theta}{ms}\right)_{\text{S.P.}} = 1 \text{ (cm)} \quad \left(\frac{\theta}{ms}\right)_{\text{H.P.}} = 170 \text{ (cm)}$$

Mit diesen Werten läßt sich für beide Pendel der Faktor  $\left(\frac{\theta}{ms} - \frac{g}{\omega^2}\right)$  für alle Frequenzen berechnen (s. Abb.5). Beim Stehenden Pendel kann  $\frac{+g}{ms}$  gegen den für alle Frequenzen viel größeren Bruch  $\frac{g}{\omega^2}$  vernachlässigt werden. Wie man sieht, besitzt

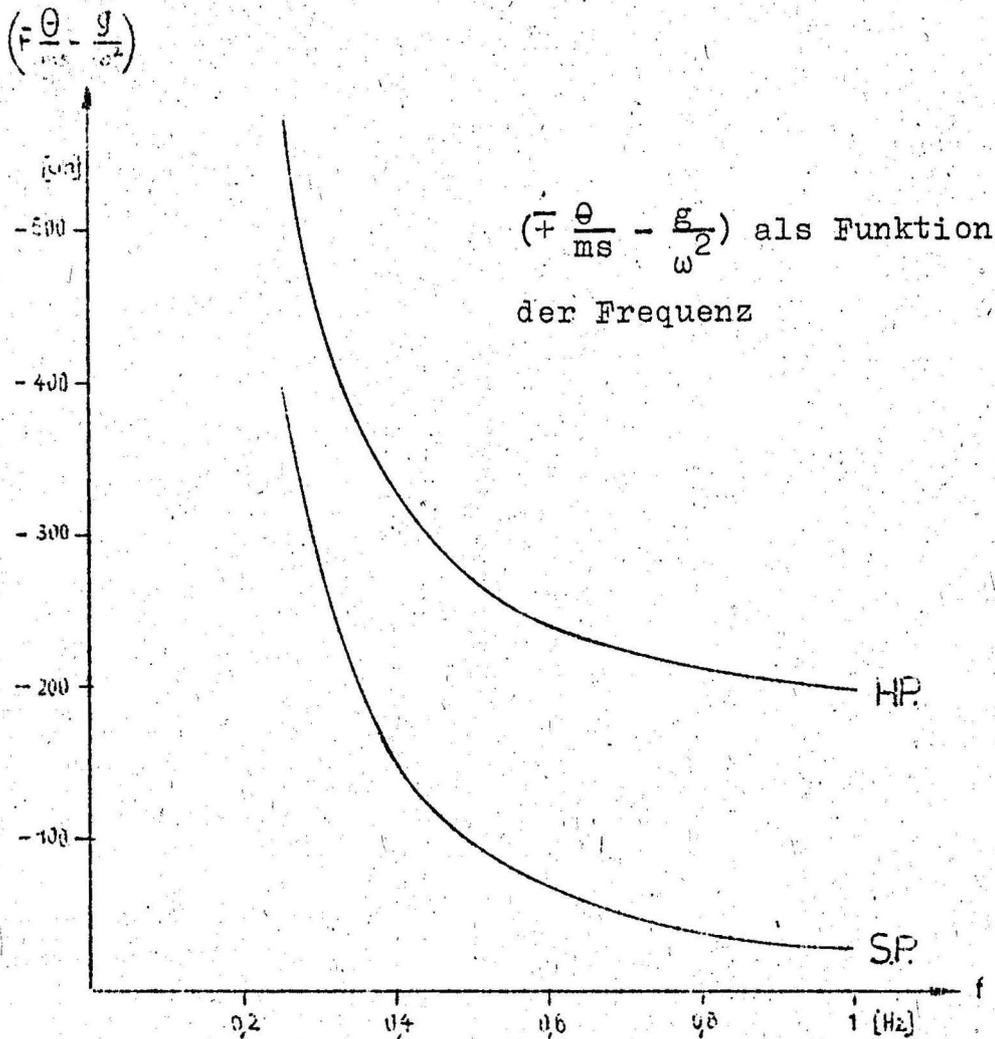


Abb. 5

die Klammer damit stets einen negativen Wert; das bedeutet, daß der durch die Drehschwingung verursachte Fehler sich jeweils in einer Verkleinerung der Amplitude des Pendelausschlages äußert.

Bei Kenntnis des Vergrößerungsmaßstabes  $V$ , des Winkels  $\alpha_0$  und des Faktors  $(\bar{\theta} \frac{g}{ms} - \frac{g}{\omega^2})$  läßt sich nach Gleichung (8) der gemessene Pendelausschlag korrigieren und damit die gesuchte Amplitude der Horizontalschwingung  $z_0$  genau bestimmen. Während der Vergrößerungsmaßstab  $V$  auf einfache Art durch Eichung des Meßgerätes gewonnen werden kann (s. unten, S. 20), bereitet die Bestimmung von  $\alpha_0$  gewöhnlich einige Schwierigkeiten. Im folgenden Abschnitt wird eine Abschätzung dieses Winkels für den Fall von Turmschwingungen vorgenommen.

b) Abschätzung des Winkels  $\alpha_0$  für Turmschwingungen: Es interessiert hier allein die Abhängigkeit der Drehschwingungsamplitude  $\alpha_0$  von der Amplitude der horizontalen Schwingung  $z_0$ . Beide sind, wie oben vorausgesetzt wurde, durch eine lineare Beziehung miteinander verknüpft:

$$\alpha_0 = k \cdot z_0 \quad \text{s. Gleichung (5)}$$

Die Konstante  $k$  hängt nun außer von der Turmhöhe von der Schwingungsform und der Bauart des Turmes ab. Sie kann rechnerisch in den seltensten Fällen exakt ermittelt werden; jedoch läßt es sich abschätzen, welchen Wertebereich sie etwa annehmen kann.

Dazu sei der Sonderfall eines in seinem Querschnitt und seinem Baumaterial homogenen Turmes der Höhe  $l$  betrachtet (z.B. etwa: Schornstein). Für seine Schwingungsform lassen sich zwei Grenzfälle denken:

- 1) Der Turm bleibt starr und schwingt um eine an seinem Fußpunkt gelegene Achse. Es gilt  $\alpha_0 = \frac{1}{l} \cdot z_0$  und damit  $k = \frac{1}{l}$ .
- 2) Der Turm verhält sich wie ein einseitig eingespannter Stab. Sein Auslenkwinkel an der Spitze beträgt, wenn man als Annäherung den statischen Fall betrachtet (s. Hütte I):  $\alpha_0 = \frac{4}{3l} \cdot z_0$  also:  $k = \frac{4}{3l}$ .

Ueber die wirkliche Schwingungsform des Turmes läßt sich nur die Aussage machen, daß die Fälle 1) und 2) gemeinsam auftreten können. Damit ergibt sich als Abschätzung für  $k$ :

$$\frac{1}{l} < k < \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{l} \quad (10)$$

Wesentlich schwieriger ist es, eine Abschätzung für  $k$  bei beliebig geformten Türmen vorzunehmen. Da dieses auf rechnerischem Wege zumeist nicht möglich ist, wurde bereits daran gedacht, durch gesonderte experimentelle Messungen Aussagen über die Schrägstellung zu gewinnen. Solche Messungen wären unter Zugrundelegung der Rotationsträgheit schwerer Massen (z.B. Räder mit großen Trägheitsmomenten in indifferenter Gleichgewichtslage) prinzipiell möglich, sind jedoch von uns noch nicht durchgeführt worden.

Ueber die Konstante  $k$  läßt sich mit Sicherheit nur soviel aussagen, daß sie keinesfalls kleiner als  $\frac{1}{1}$  werden kann. Mit hinreichender Genauigkeit kann außerdem angenommen werden, daß  $k$  als obere Grenze den Wert  $\frac{2}{1}$  bei den meisten Türmen kaum überschreiten wird. Diese Grenze ist von uns rein willkürlich abgeschätzt worden und bedarf zu ihrer Untermauerung noch experimenteller Messungen. Es gilt also:

$$\frac{1}{1} < k < \frac{2}{1} \quad (11)$$

c) Abschätzung des Fehlers: Nachdem in den letzten beiden Abschnitten die Abschätzung des Faktors  $(\frac{\theta}{ms} - \frac{g}{\omega^2})$  und der Winkelamplitude  $\alpha_0$  vorgenommen wurde, lassen sich jetzt Aussagen über die Größe des durch die Drehschwingung verursachten Fehlers machen. Nach Gleichung (8) beträgt die Amplitude des gemessenen Pendelausschlages:

$$u_0 = v \cdot z_0 \left[ 1 + k \left( \frac{\theta}{ms} - \frac{g}{\omega^2} \right) \right] \quad (8)$$

Setzt man für  $k$  den nach der Abschätzung in Gleichung (11) genau in der Mitte liegenden Wert  $k = \frac{1,5}{1}$  und für den Faktor  $(\frac{\theta}{ms} - \frac{g}{\omega^2})$  die in Abb. 5 angegebenen Werte ein, so ergeben sich für den Meßfehler  $k (\frac{\theta}{ms} - \frac{g}{\omega^2})$  bei den im Institut gebauten beiden Pendelarten die in dem Diagramm (Abb. 6) ersichtlichen Werte. Als Parameter wurden die Turmhöhen  $l = 7,5 \text{ m}, 10 \text{ m}, 20 \text{ m}$  und  $50 \text{ m}$  gewählt. Der Fehler nimmt bei kleinen Turmhöhen und niedrigen Frequenzen beträchtlich große Werte an, bei großen Turmhöhen und hohen Frequenzen kann er dagegen fast vernachlässigt werden. Die bei dem Hängenden Pendel bei kleinen Turmhöhen ( $7,5 \text{ m}$  und  $10 \text{ m}$ ) auftretenden verhältnismäßig großen Fehler sind bei der praktischen Anwendung dieses Gerätes von keiner Bedeutung, da, wie oben ausgeführt wurde, das Hängende Pendel nur zur Messung großer Amplituden der erregenden Schwingung, also bei großen Turmhöhen herangezogen werden kann.

Nähert sich der Fehler dem Wert  $(-1)$ , so ist nach Gleichung (8) der resultierende Pendelausschlag  $u_0 = 0$ , d.h. in diesem Fall ist der durch die Drehschwingung verursachte Fehler gleich dem Pendelausschlag, der allein durch die horizontale Schwingung hervorgerufen wäre. Da beide Einflüsse in entgegengesetzter Richtung wirken, heben sie sich gegenseitig auf. Das Meßgerät ist in dem Fall nicht verwendbar.

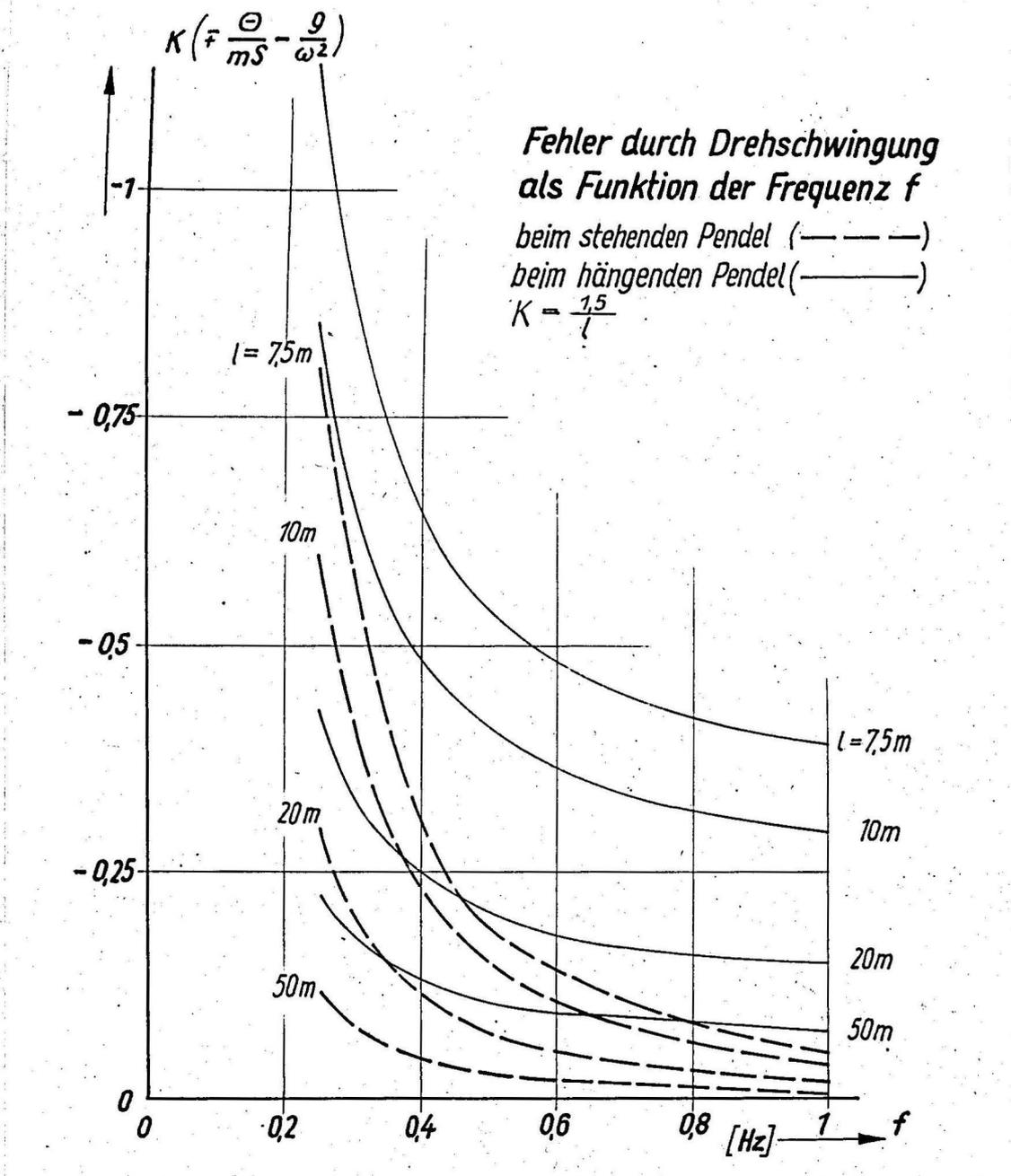


Abb. 6

d) **Elimination des Fehlers:** Eine rechnerische Elimination des ----- Fehlers ist nur dann sinnvoll, wenn der Wert  $k \left( \mp \frac{\Theta}{mS} - \frac{g}{\omega^2} \right)$  nicht zu nahe an (- 1) herankommt, da sonst der gemessene Pendelausschlag  $u_0$  zu klein wird.

Sofern die Konstante  $k$  bekannt ist, bereitet die Berechnung des Fehlers nach Gleichung (8) und Abb. 5 und die Korrektur des Meßergebnisses keine Schwierigkeiten. Wenn jedoch über  $k$  keine weiteren Aussagen gemacht werden können, als daß  $\frac{1}{1} < k < \frac{2}{1}$ , so besteht eine einfache Möglichkeit darin, für  $k$  willkürlich den Wert  $\frac{1,5}{1}$  anzunehmen, und die in Abb. 6 für die jeweilige Frequenz und Turmhöhe angegebenen Fehler-Werte in Gleichung (8)

einzusetzen. Dadurch erreicht man bereits eine für die meisten Zwecke ausreichende Korrektur des Meßergebnisses. Der Fehler, der danach noch vorliegt, weil  $k$  im ungünstigsten Fall die Werte  $\frac{1}{1}$  bzw.  $\frac{2}{1}$  annehmen kann, überschreitet nur bei kleinen Turmhöhen und niedrigen Frequenzen den Wert  $\pm 10\%$ .

## 5. Beschreibung der beiden gebauten Meßgeräte

a) Stehendes Pendel (s. Abb. 7): Von besonderer Wichtigkeit erweist sich bei dem Stehenden Pendel die Art der Aufhängung. Eine Schneidenlagerung kommt deshalb nicht infrage, weil die hierbei auftretende Haftreibung stört. Um diese Haftreibung weitgehend herabzusetzen, ist das Pendel an Kreuzfedergelenken aufgehängt. Die Kreuzfedergelenke erfüllen gleichzeitig eine zweite Aufgabe: Sie bewirken das Rückstellmoment  $c$  (s. Abb. 1a), das dem Pendel seine stabile Lage gibt.

Aus den obigen Berechnungen geht hervor, daß zur Erzeugung einer tiefen Eigenfrequenz und einer hohen Empfindlichkeit die Differenz  $c - mgs$  möglichst klein gehalten werden muß. Praktisch wird dies dadurch erreicht, daß bei einem konstanten  $c$  die Lage des Schwerpunktes mit Hilfe eines in der Höhe verstellbaren Gewichtes verändert wird. Die dadurch erzielte Eigenfrequenz liegt bei 0,23 Hz, und es lassen sich horizontale Schwingungen messen, deren Amplituden in dem Bereich zwischen 0,02 und 2 mm liegen.

Die Ablesung und Registrierung der gemessenen Schwingungen muß infolge der auftretenden kleinen Drehmomente auf kräftefreiem Wege erfolgen. Deshalb wurde eine optische Anzeigevorrichtung gewählt. Diese erfüllt gleichzeitig zwei Funktionen:

1. Die direkte Ablesung der Amplituden  $\bar{u}_0$
2. Die Registrierung der Schwingungen

Die Amplituden der Pendelschwingungen werden mit Hilfe eines Meßmikroskopes an einem mit dem Pendel verbundenen Zeiger abgelesen.

Die Registrierung der Schwingungen erfolgt auf photoelektrischem Wege: Der Lichteinfall auf einem Photowiderstand wird durch eine Blende periodisch mit der Schwingung geändert (s.

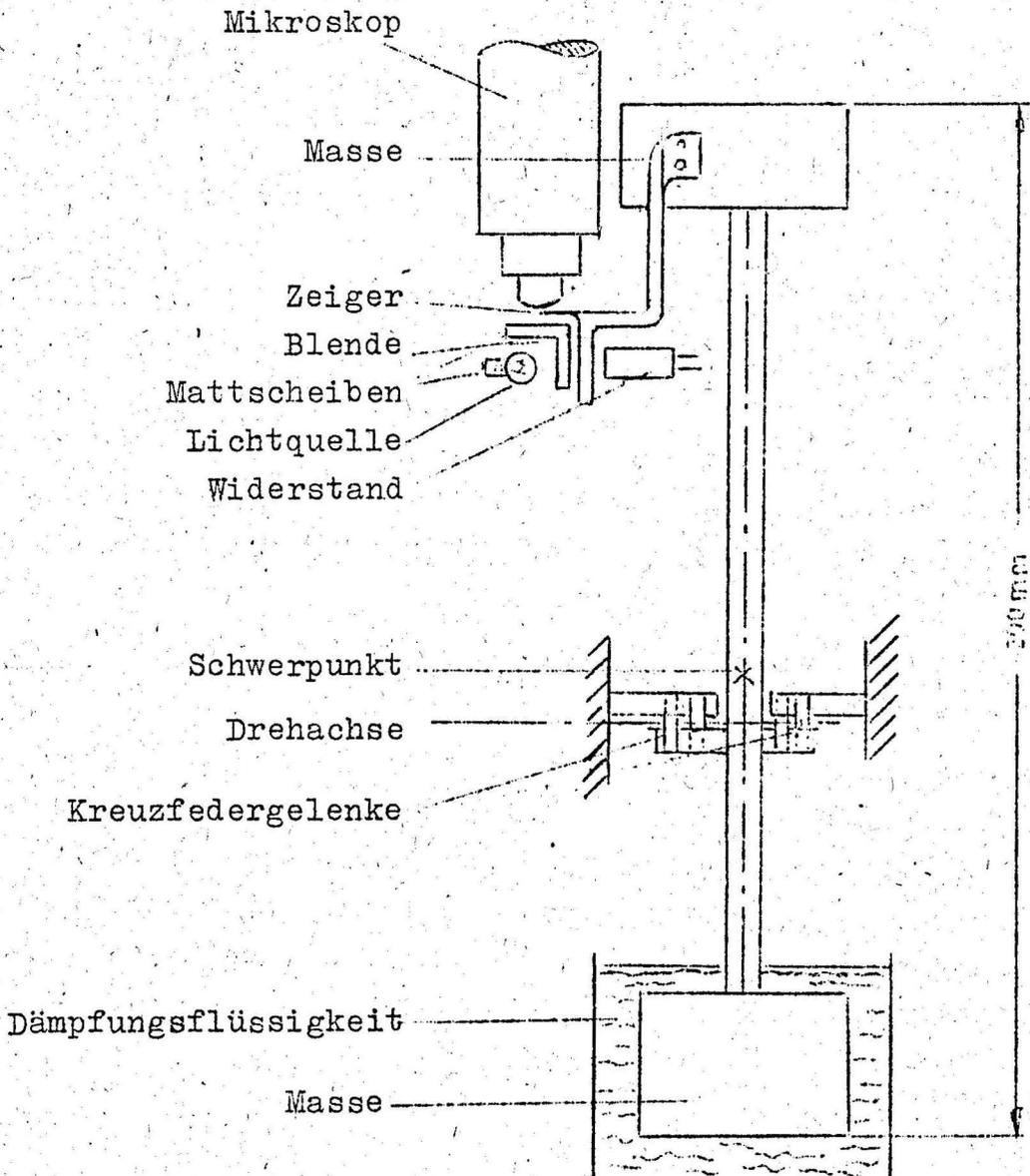


Abb. 7. Prinzipskizze zum Stehenden Pendel

Abb.8). Der Spannungsabfall, der sich infolgedessen an dem Vorwiderstand  $R$  mit der Schwingung ändert, wird einem Registriergerät (z.B. dem "Oszillscript" der Fa. Philips) zugeführt.

Besonders muß bei dieser Anordnung beachtet werden, daß der Lichteinfall auf den Photowiderstand genau proportional dem jeweiligen Pendelausschlag ist. Nur dann läßt sich eine wirklichkeitsgetreue Darstellung der Schwingung erzeugen. Es ist deshalb erforderlich, daß die Lichtintensität in dem Bereich, der auf den Photowiderstand fällt, konstant ist, also keinerlei Schwankungen unterworfen ist. Aus diesem Grund ist eine Mattscheibe zwischen der Lichtquelle und der Blende angebracht, wo-

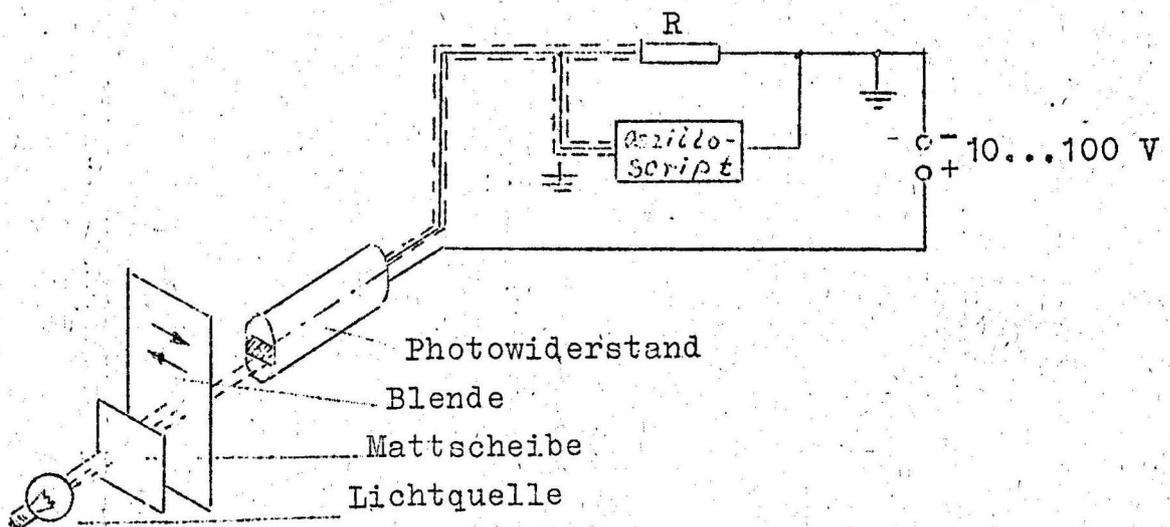


Abb. 8

durch diffuses, in der Intensität homogenes Licht erzeugt wird.

Abb. 9 gibt den Spannungsabfall  $U$  an dem Widerstand  $R$  als Funktion der Amplitude  $u_0$  des Pendelausschlages an. Die bei Werten von  $u_0$  oberhalb von 3,5 auftretende Abweichung vom linearen Verlauf dieser Funktion beträgt maximal 10 %. Bei einer außen angelegten Spannung von 110 V beträgt der Spannungsabfall  $U$  am Ort der Mittellage des Pendels ( $u_0 = 2,5$ ) 23 V.

Die Frequenzabhängigkeit des Photowiderstandes braucht in dem von uns benutzten Frequenzbereich nicht berücksichtigt zu werden, da der hierdurch entstehende Fehler weit unterhalb der Meßgenauigkeit liegt.

Beide Anzeigevorrichtungen lassen sich miteinander kombinieren: Die Amplituden der auf dem Registriergerät aufgeschriebenen Schwingungen können mit Hilfe der am Meßmikroskop abgelesenen Amplitudenwerte bestimmt werden. Auf diese Weise kann das Registriergerät geeicht werden.

Die Dämpfung des Pendels erfolgt dadurch, daß sich eine an seinem unteren Ende befestigte Platte in einem Oelbad bewegt. Das Dämpfungsmaß  $D$  läßt sich experimentell aus dem logarithmischen Dekrement bestimmen:

$$D = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(u_0)_n}{(u_0)_n + 1} \quad (12)$$

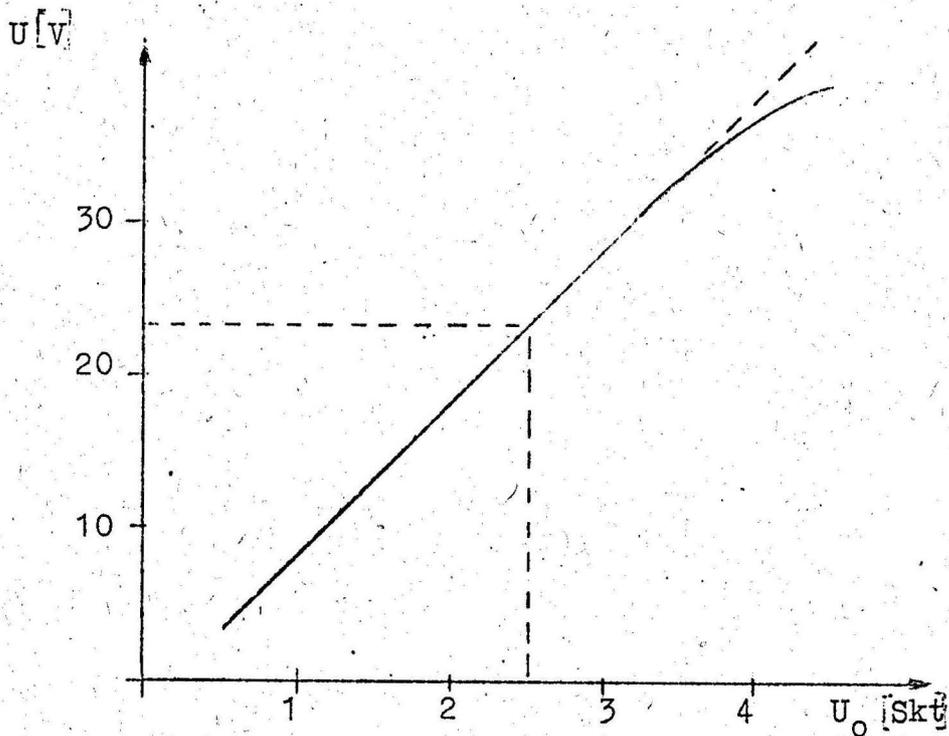


Abb. 9

Hierbei bedeuten  $(u_0)_n$  und  $(u_0)_{n+1}$  zwei aufeinander folgende Pendelausschläge. Bei dem Stehenden Pendel wurde ein Dämpfungsmaß von  $\approx 0,45$  bei einer Temperatur des Oelbades von  $20^\circ\text{C}$  gemessen. Bei diesem Wert von  $D$  ergab sich für die Frequenzabhängigkeit des Vergrößerungsmaßstabes  $V$  folgender Verlauf (Abb.10):

Diese Kurve ist experimentell mit Hilfe eines Schwingtisches ermittelt worden. Die Amplituden der Tischschwingungen  $z_0$  wurden mit einer Meßuhr ermittelt.

Die Länge des Pendels beträgt 20 cm, die Gesamthöhe des Gerätes einschließlich einer zum Schutz vor Luftströmungen angebrachten Plexiglashülle 35 cm. Das Gesamtgewicht des Gerätes beträgt 4 kg.

b) Hängendes Pendel (Abb.11): Zur Messung von Schwingungen größerer Amplituden ist, wie aus den obigen Berechnungen hervorgeht, ein Hängendes Pendel besser geeignet. Das im Institut entwickelte Gerät hat eine Eigenfrequenz von 0,25 Hz. Es ist für Messungen bei Erregungsamplituden von 0,2 cm bis 5 cm geeignet. Die Aufhängung des Pendels

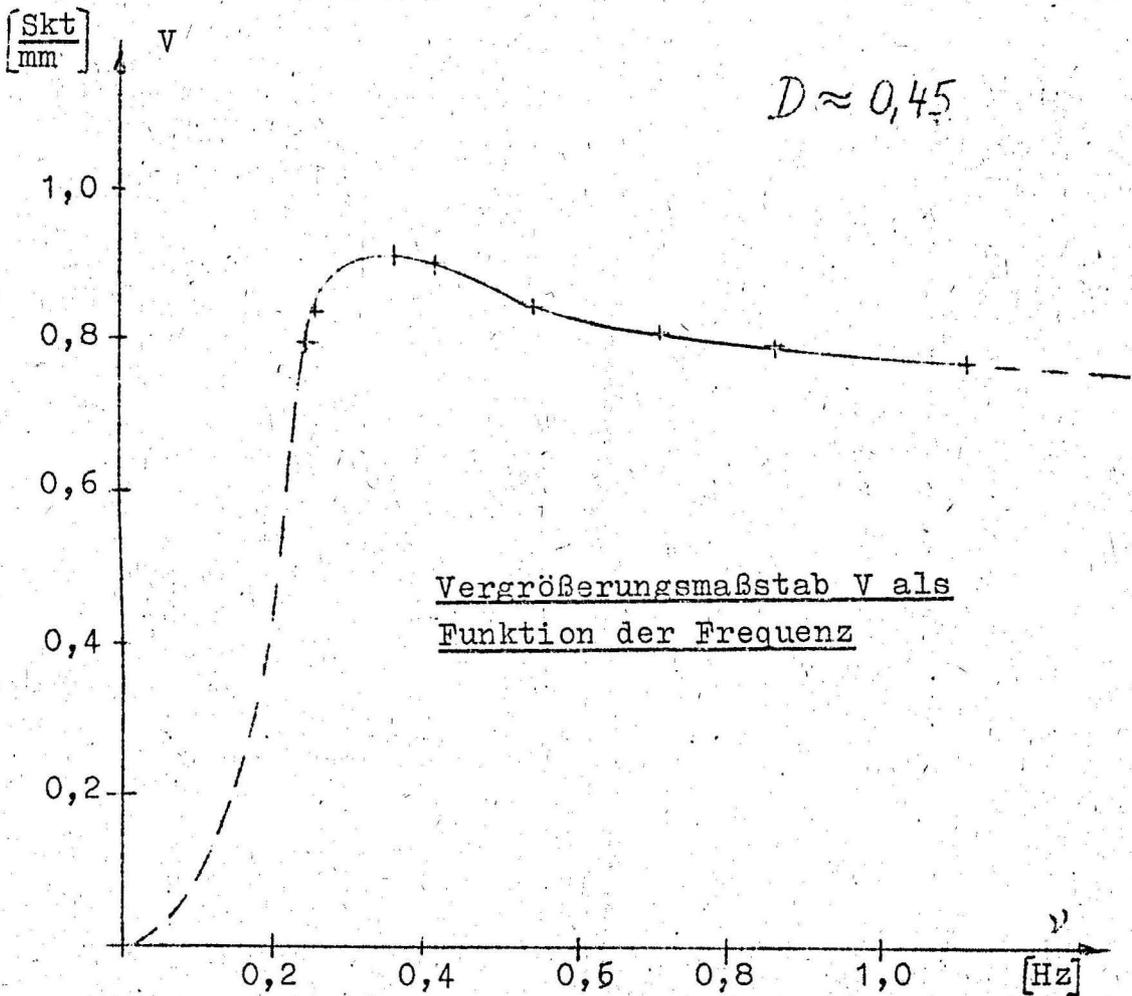


Abb.10

erfolgt ebenfalls an Kreuzfedergelenken.

Die Bestimmung der Amplitude und die Registrierung der Schwingungsform geschieht mit Hilfe eines Verlagerungsaufnehmers der Fa. Philips. Da der Aufnehmer infolge seiner Federkraft ein zusätzliches Drehmoment auf das Pendel ausübt, schwingt es nicht mehr um die Vertikale, sondern um eine Ruhelage, die um einen bestimmten Winkel gegenüber der Vertikalen versetzt ist. Außerdem wird infolge der Federkraft des Aufnehmers die Eigenfrequenz des Pendels erhöht. Um diese Einflüsse des Aufnehmers möglichst gering zu halten, muß die Masse des Pendels und seine Länge groß gewählt werden: Das Gewicht des Pendels beträgt 2,5 kg und seine Länge 100 cm.

Als Dämpfungsmittel wird wieder Oel benutzt, wobei sich ein Dämpfungsmaß von  $D = 0,2$  ergibt. Bei diesem Wert von  $D$  erhält man für die Frequenzabhängigkeit des Vergrößerungsmaßstabes  $V$

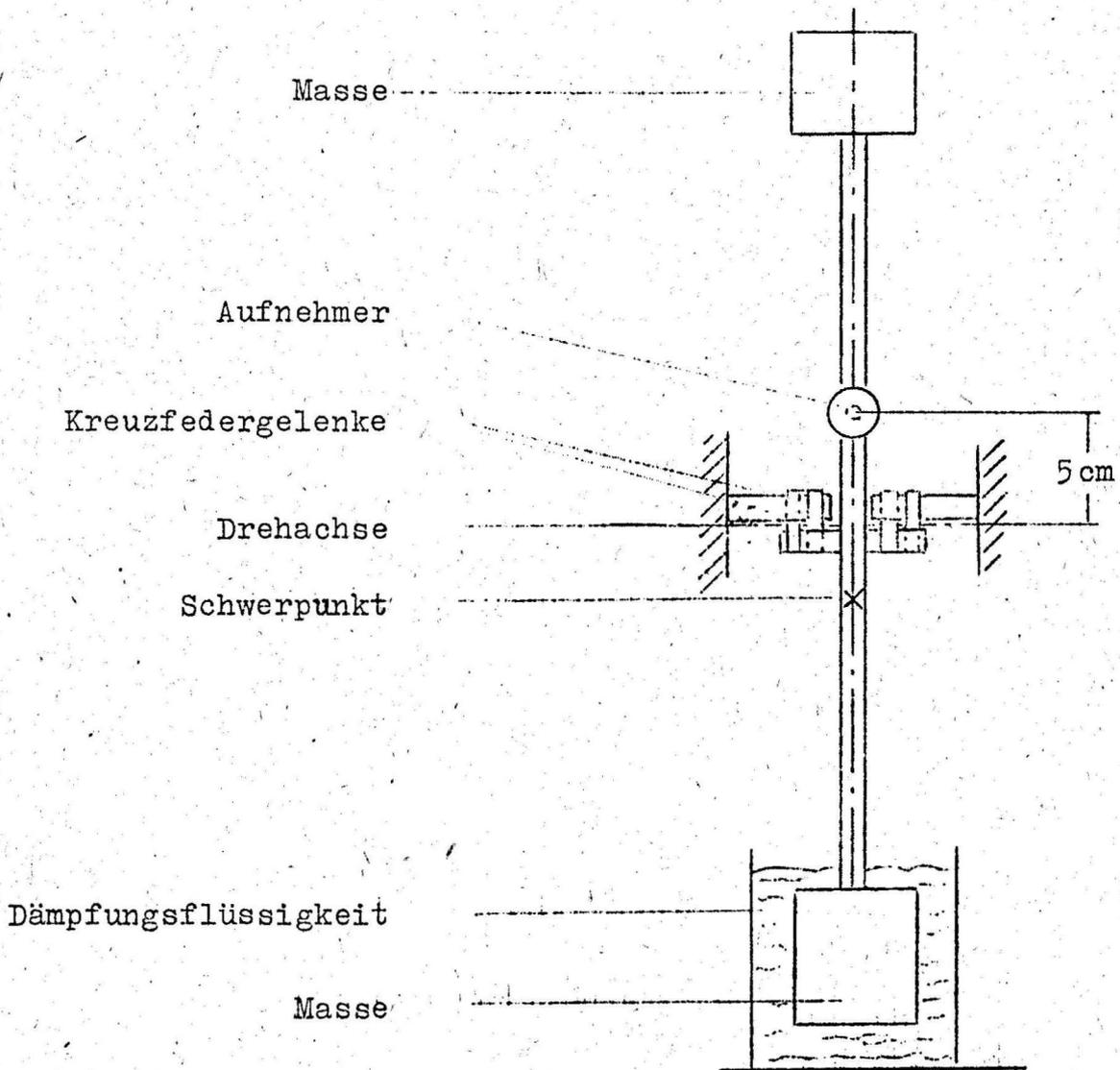


Abb.11

folgende Kurve (Abb.12). Durch ein zäheres Oel läßt sich das Dämpfungsmaß natürlich erhöhen, so daß die Resonanzüberhöhung entfällt.

Hierbei ist  $V$  das Verhältnis des mit Hilfe des Verlagerungsaufnehmers über eine Meßbrücke gemessenen Pendelausschlages (in willkürlichen Einheiten) zu der Amplitude der horizontalen erregenden Schwingung. Das Gewicht des gesamten Meßgerätes beträgt 21 kg und seine Gesamthöhe 100 cm. Wegen der damit verbundenen Unhandlichkeit wird die Möglichkeit einer praktischen Anwendung des Gerätes stark herabgesetzt.

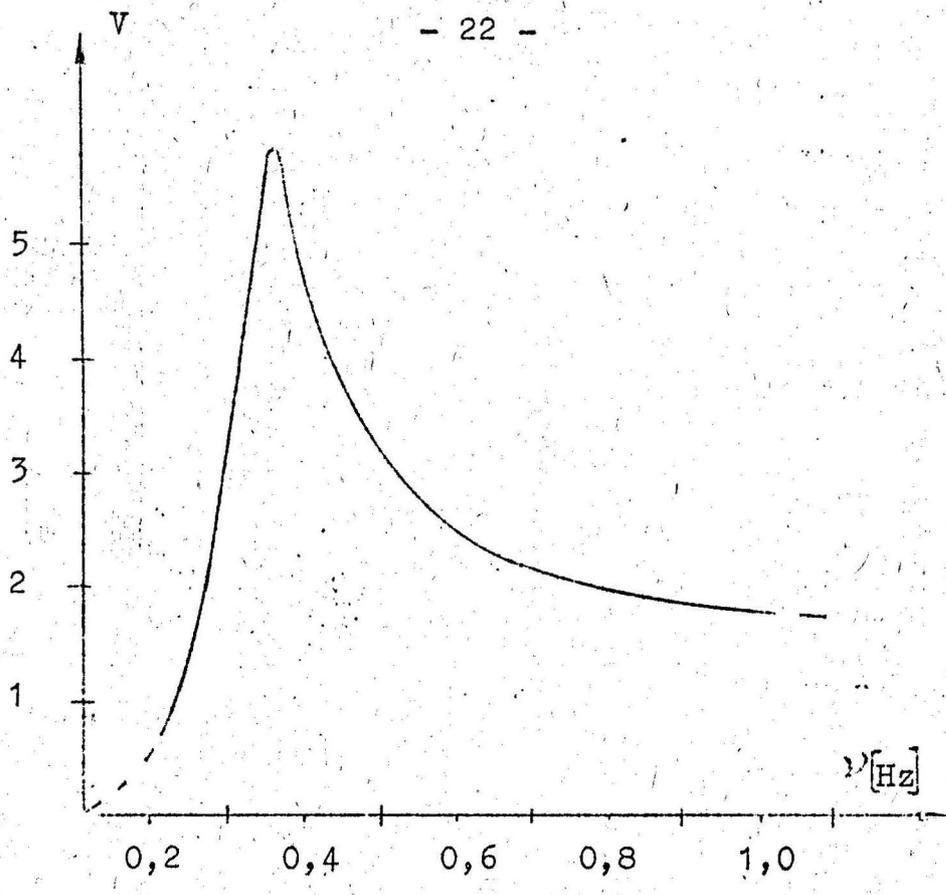


Abb. 12

